Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 12.06.2014.

Drugi parcijalni iz Euklidske geometrije II, (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

Zadatak br. 1

(40%)(a) Znamo da se površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Krenuvši isključivo od ove formule izvesti formulu za površinu $P = \frac{O \cdot r}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla, gdje je O obim trougla, a r poluprečnik upisane kružnice.

(60%)(b) Znamo da se površina pravouglog trougla $\triangle ABC$ računa po formuli $P = \frac{a \cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Krenuvši isključivo od ove formule izvesti formulu za površinu $P = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla, ako su a, b, c stranice trougla, a $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC$ i $\gamma = \measuredangle ACB$.

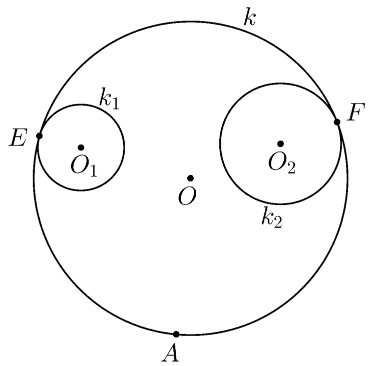
Zadatak br. 2

(50%) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži. (Detaljno sprovesti sve četri koraka: analizu, konstrukciju, dokaz i diskusiju).

(50%) Dat je trougao $\triangle ABC$. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica. (Detaljno sprovesti sve četri koraka: analizu, konstrukciju, dokaz i diskusiju).

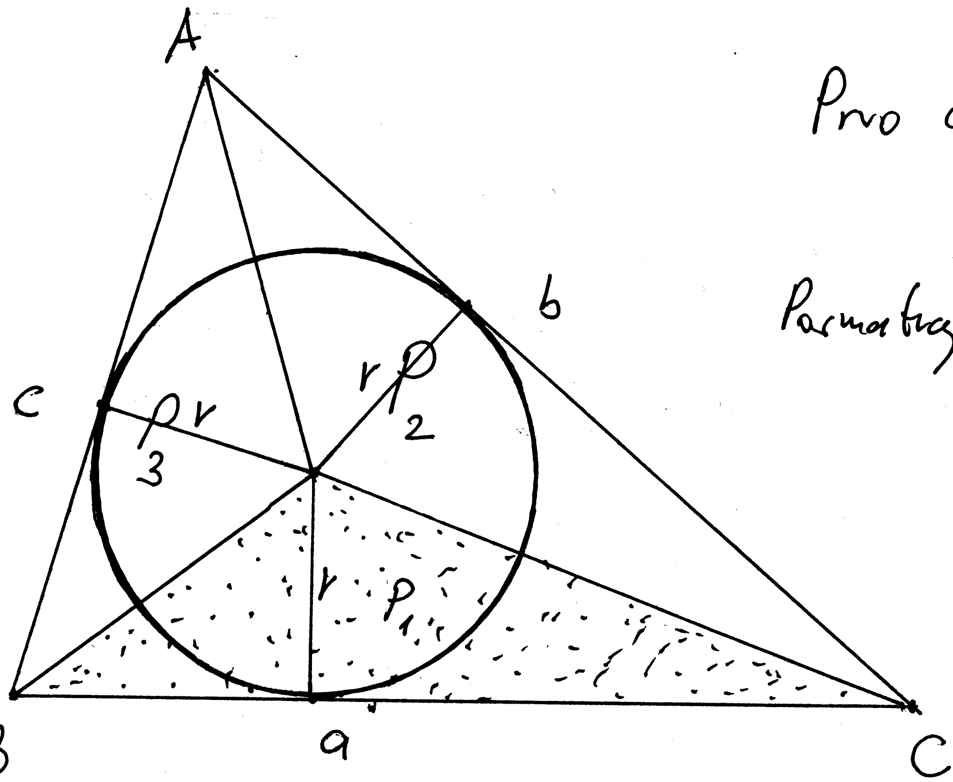
Zadatak br. 3

Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



(#) Znamo da se površina pravouglog trougla ΔABC računa po formuli $P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Krenuvši isključivo od ove formule izvesti formulu za površinu $P=\frac{O\cdot r}{2}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla, gdje je O obim trougla, a r poluprečnik upisane kružnice.

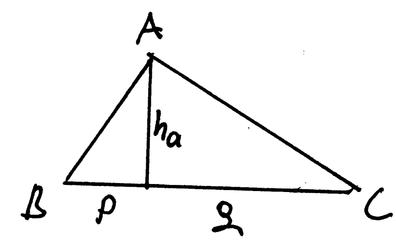
Rj:



Prvo dokažimo da je

$$P=\frac{h_a\cdot a}{2}$$

Posmatrajmo sliku



$$P=\frac{p\cdot h_a}{2}+\frac{q\cdot h_a}{2}$$

$$=\frac{h_a}{2}(p+q)=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

Sad površinu ΔABC podjelimo na tri dijela P_1, P_2 i P_3.

$$P_1=\frac{r\cdot a}{2}, \quad P_2=\frac{r\cdot b}{2}, \quad P_3=\frac{r\cdot c}{2}$$

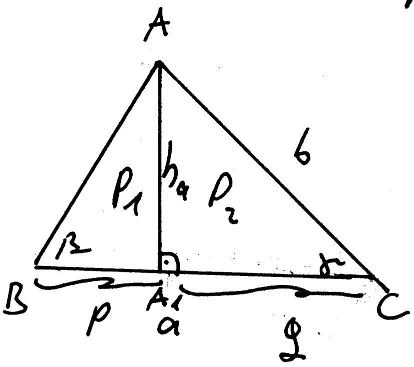
$$P=P_1+P_2+P_3=\frac{r}{2}(a+b+c)=\frac{r\cdot O}{2}$$

Time smo dobili $P=\frac{r\cdot O}{2}$ q.e.d.

(#) Znamo da se površina pravouglog trougla ΔABC računa po formuli: $P=\frac{a\cdot b}{2}$, gdje su a i b katete trougla. Krenuvši isključivo od ove formule izvesti formulu za površinu $P=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$ proizvoljnog raznostraničnog trougla, ako su a, b, c stranice trougla, a $\alpha=\sphericalangle BAC$, $\beta=\sphericalangle ABC$ i $\gamma=\sphericalangle ACB$.

Rj.:

Prvo izvedimo formulu da se površina raznostraničnog trougla računa po formuli $P=\frac{h_a\cdot a}{2}$ (ili $P=\frac{h_b\cdot b}{2}$ ili $P=\frac{h_c\cdot c}{2}$)



$$P=P_1+P_2=\frac{p\cdot h_a}{2}+\frac{q\cdot h_a}{2}=\frac{h_a}{2}(p+q)=\frac{h_a\cdot a}{2}$$

Slično se izvode druge dvije formule.

Sada izvedimo formule $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ($P=\frac{1}{2}ac\sin\beta$ i $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$)

$P=\frac{a\cdot h_a}{2}$, $\sin\gamma=\frac{h_a}{b}$ (u ΔAA_1C) $\Rightarrow h_a=b\sin\gamma$

$\Rightarrow P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (slično $P=\frac{1}{2}ac\sin\beta$, $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$)

Na kraju $P^3=P\cdot P\cdot P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\cdot\frac{1}{2}ac\sin\beta\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha$

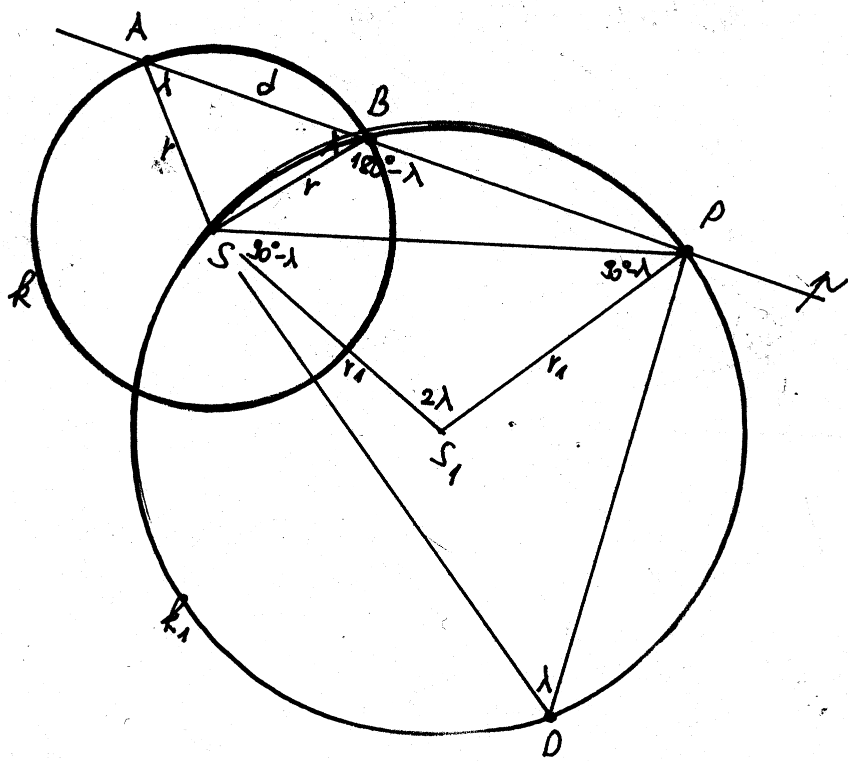
$$P=\sqrt[3]{\frac{1}{8}a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$P=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$ q.e.d.

(#) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \quad \sphericalangle PBS = 180° - \lambda$

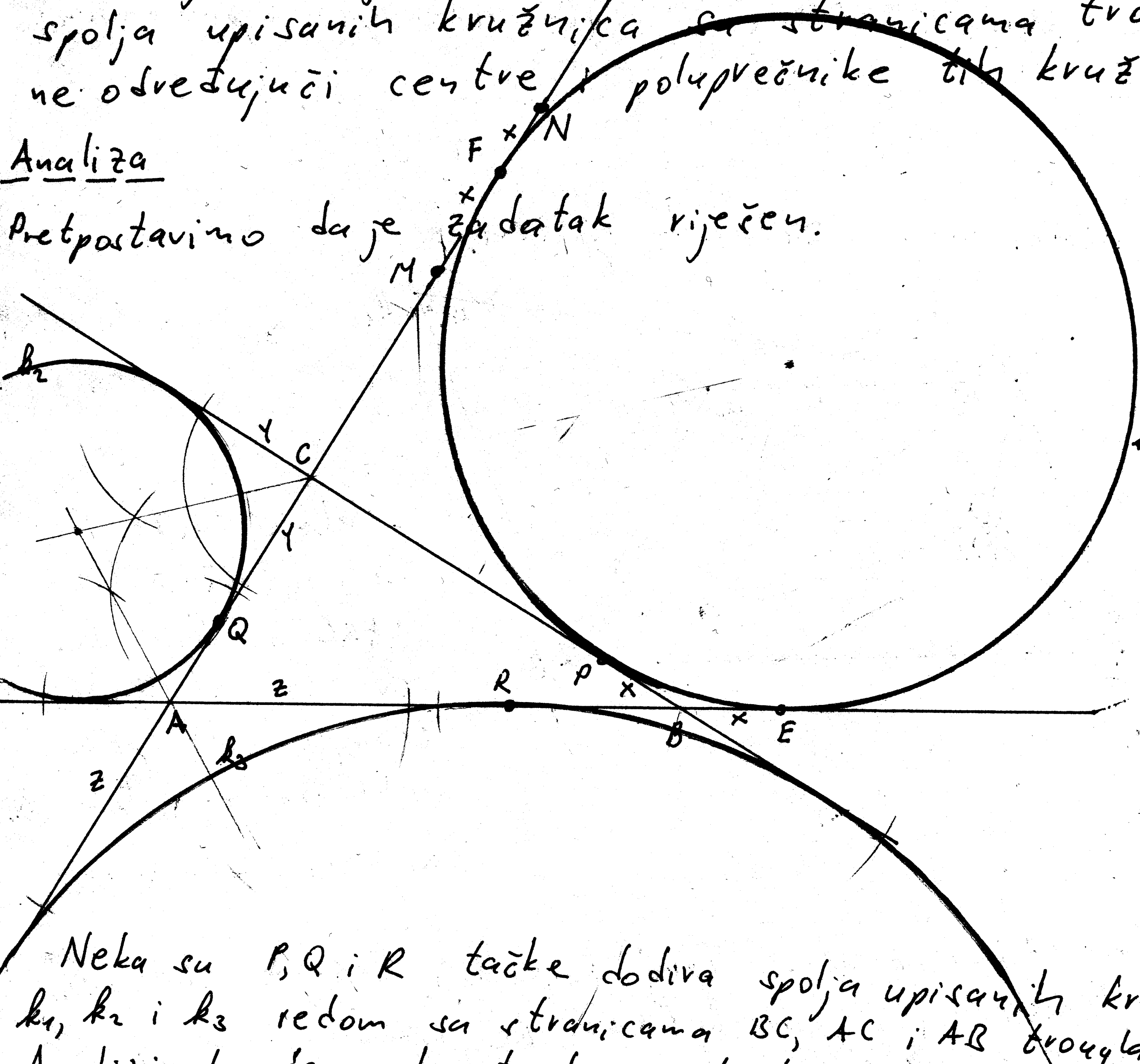
Ako je $k_1(S_1, r_1)$ kružnica opisana oko $\triangle SPB$ tada proizvoljan oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\sphericalangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \sphericalangle PSS_1 \cong \sphericalangle S_1PS = 90° - \lambda$.

U trouglu $\triangle ASB$ su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

(#) Dat je trougao ΔABC. Konstruisati tačke dodira spolja upisanih kružnica sa stranicama trougla ne određujući centre i poluprečnike tih kružnica.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su P, Q i R tačke dodira spolja upisanih kružnica k_1, k_2 i k_3 redom sa stranicama BC, AC i AB trougla ΔABC.
Analizirat ćemo konstrukciju tačke R.
Na kružnici k_1 imamo tri para tangentnih duži tj.

$BE \cong BP$, $CP \cong CF$, $AF \cong AE$ (E i F su tačke dodira k_1 i $p(A,B)$ i $p(A,C)$)

Neka je $M \in p(A,C)$: $AM \cong AB \Rightarrow MF = BE = x$.

Neka je $N \in p(A,C)$: $CN \cong CB \Rightarrow NF = PB = BE = x$.

Sad imam $MN = AN - AM = b + a - c$

pa je $x = \frac{MN}{2} = \frac{b+a-c}{2}$.

Slično bi pokazali da je $y = \frac{c+b-a}{2}$ i $z = \frac{a+c-b}{2}$.

Kako znamo duži x, y i z sad nije teško konstruisati tačke P, Q i R.